Universidade Federal de Mato Grosso

AULA 04 – Estatística

Prof. Lucas Bianchi

Cuiabá, 09 de agosto de 2016

Na aula de hoje, estudaremos:

- ✓ Variáveis aleatórias
- ✓ Distribuições de probabilidades discretas
- ✓ Distribuições de probabilidades contínuas

Variável Aleatória

Uma variável aleatória (v.a) associa um valor numérico a cada resultado de um fenômeno aleatório e uma distribuição de probabilidade associa uma probabilidade a cada valor de uma variável aleatória.

A probabilidade de que uma variável aleatória "X" assuma um valor "x" é uma função de probabilidade, representada por:

$$P(X = x) \text{ ou } P(x)$$

Variável Aleatória Discreta (V.A.D)

Uma variável aleatória (v.a) pode assumir um número finito de valores ou infinito enumerável de valores, cujas probabilidades de ocorrência são conhecidas.

Função de Probabilidade de uma V.A.D (FP)

A função de probabilidade (fp) para uma variável aleatória discreta é chamada de função de probabilidade no ponto, ou seja, é o conjunto de pares $((x_i; P(x_i))$, i = 1, 2, ..., n. Para cada possível resultado de x_i teremos:

1) $0 \leq P(x_i) \leq 1, \forall i$

2) $\sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = 1$

Função de Distribuição de Probabilidade para V.A.D

Define-se Função de Distribuição de Probabilidade (FDP) da variável aleatória X, no ponto x_i, como a probabilidade de que X assuma um valor menor ou igual a x_i, isto é:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i)$$

A função de distribuição F(x) é a soma das probabilidades de todos os valores possíveis que a variável x pode assumir até o valor de x propriamente dito, ou seja, F(x) é a função acumulada, a função de distribuição é do tipo escada.

Assim, se x é um número inteiro não negativo, a função de distribuição é dada por:

$F(0) = P(0)$

$F(1) = P(0) + P(1)$

$F(2) = P(0) + P(1) + P(2)$

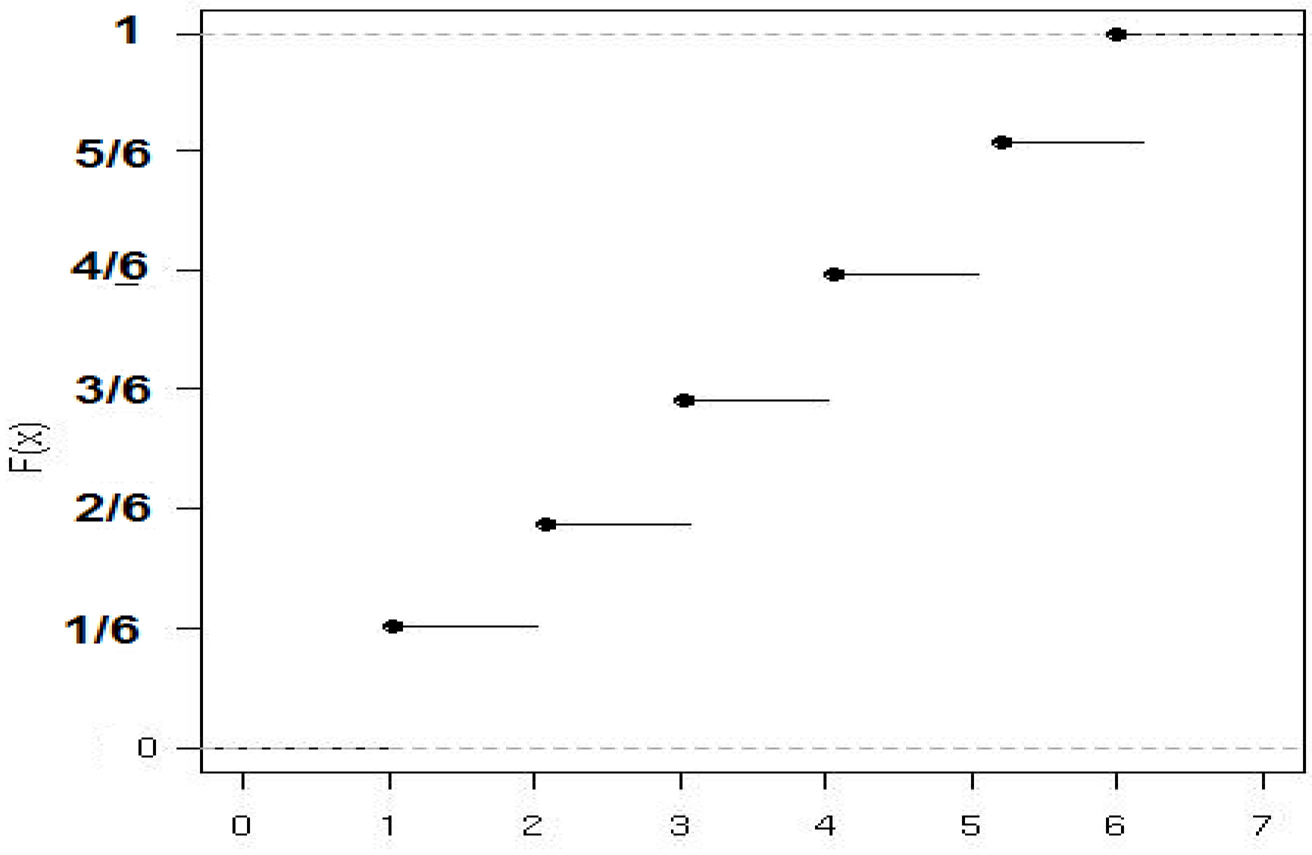
$F(3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

…

E assim sucessivamente.

Exemplo, considere a função de distribuição abaixo:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1/6, & 1 \leq x < 2 \\ 2/6, & 2 \leq x < 3 \\ 3/6, & 3 \leq x < 4 \\ 4/6, & 4 \leq x < 5 \\ 5/6, & 5 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$$



Distribuição Uniforme Discreta: É a mais simples das distribuições discretas e recebe o nome de uniforme porque todos os valores da variável aleatória são assumidos com a mesma probabilidade.

Exemplo: o lançamento de um dado não viciado, definida como X, a variável aleatória que representa a face voltada para cima, X assume os valores x = 1,2,3,4,5,6 com a mesma probabilidade 1/6.

$$f(x) = \frac{1}{6} \text{ para } x = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Generalizando, temos:

$$f(x) = \frac{1}{k} \text{ para } x = x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6.$$

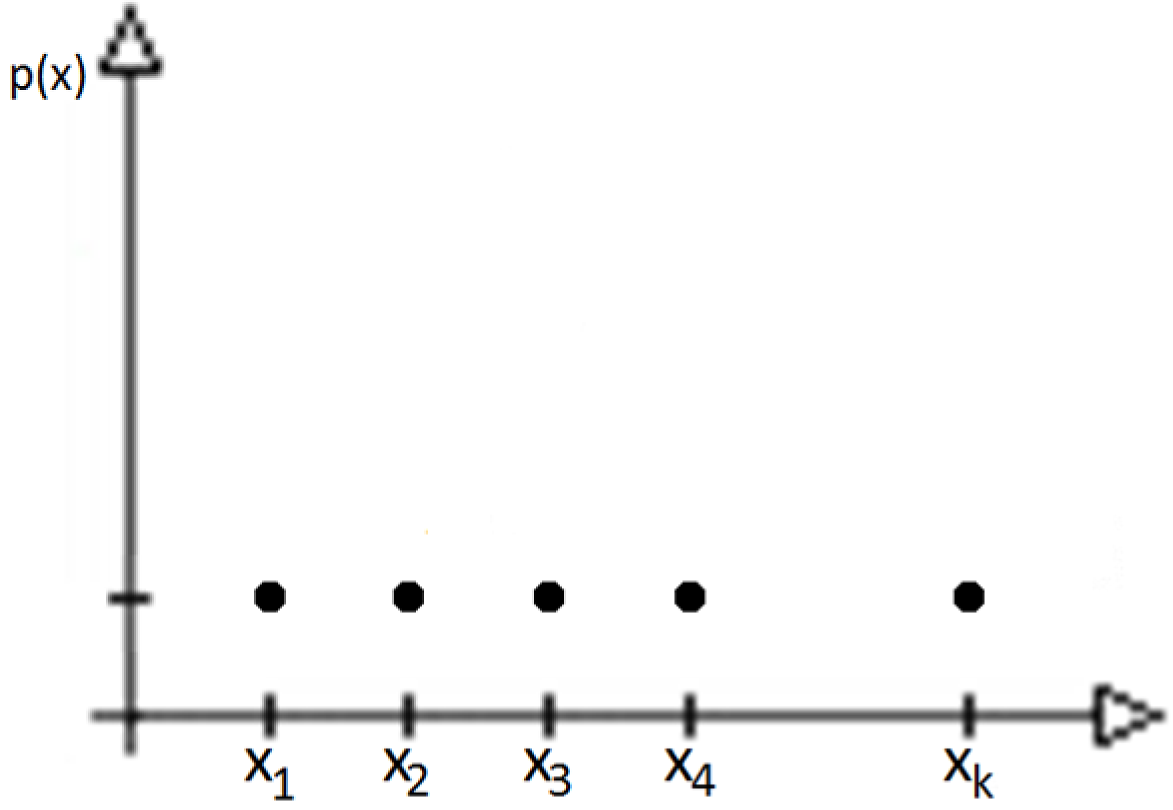
Cálculos da distribuição uniforme discreta

$$Função\ de\ probabilidade \Rightarrow f(x) = \frac{1}{n}$$

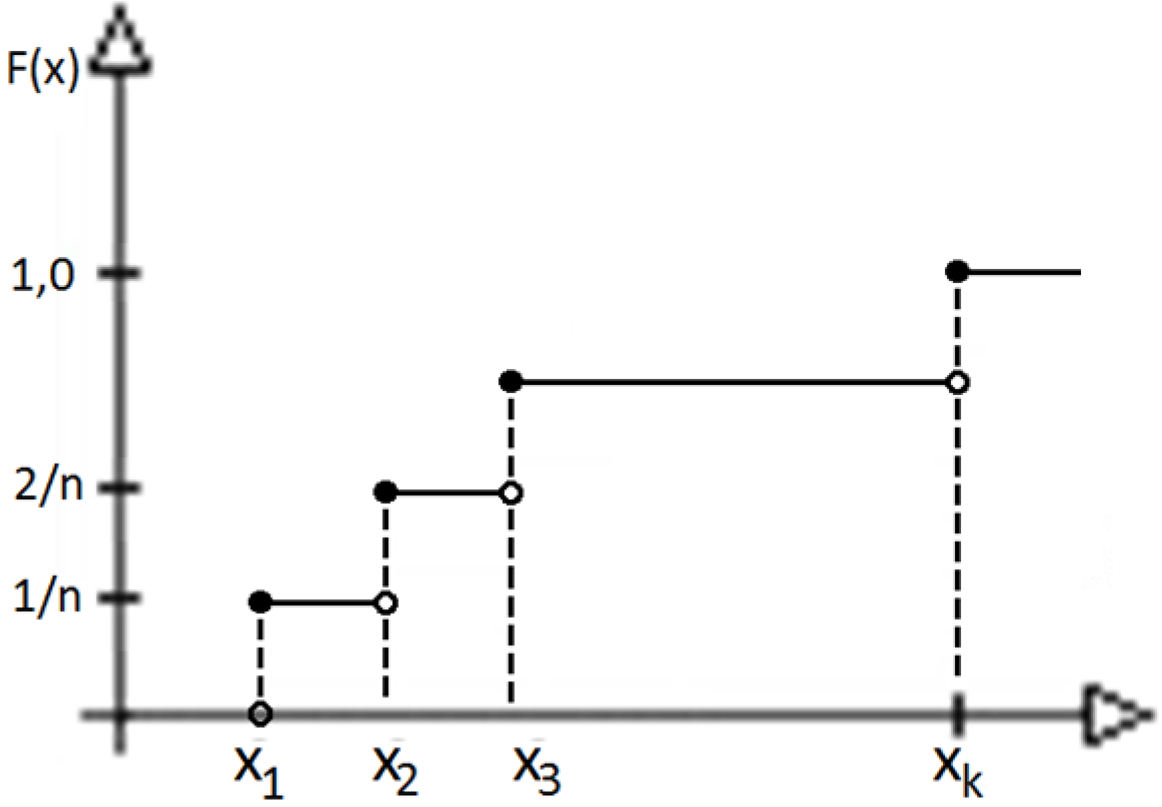
$$Média \Rightarrow E(x) = \frac{n+1}{2}$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = \frac{n^2-1}{12}$$

Gráfico da distribuição discreta uniforme



(a) Função de probabilidade



(b) Função de distribuição

Exemplo: Seja X a v.a que indica o "numero de pontos marcados na face superior de um dado", quando ele é lançado. Obtemos na tabela abaixo a distribuição de X.

Tabela 6: Modelo probabilístico para o lançamento de um dado não viciado.

Face	1	2	3	4	5	6	Total
Frequência	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5$$

$$Var(X) = \frac{6^2-1}{12} \cong 2{,}92$$

Distribuição Bernoulli: Muitos experimentos são tais que os resultados apresentam ou não uma determinada característica. Por exemplo:

- Uma moeda é lançada: o resultado ou é cara ou coroa;
- Um dado é lançado: ou ocorre face 5 ou não;
- Uma peça é escolhida ao acaso de um lote contendo 500 peças: essa peça é defeituosa ou não;
- Uma pessoa é escolhida ao acaso dentre 1000 é ou não do sexo masculino;
- Uma pessoa é escolhida ao acaso entre os moradores de uma cidade e se ela é favorável ou não a um projeto municipal.

Situações com alternativas dicotômicas podem ser representadas genericamente por respostas do tipo sucesso-fracasso. Esses experimentos recebem o nome de ensaio de Bernoulli e originam uma variável aleatória com distribuição Bernoulli.

Sucesso → P(sucesso) = p

Fracasso → P(fracasso) = q

Dizemos que X tem distribuição Bernoulli com parâmetro p.

$$X \sim Bernoulli(p)$$

Cálculos da distribuição Bernoulli

$$função\ probabilidade \Rightarrow f(x) = p^x . q^{1-x}$$

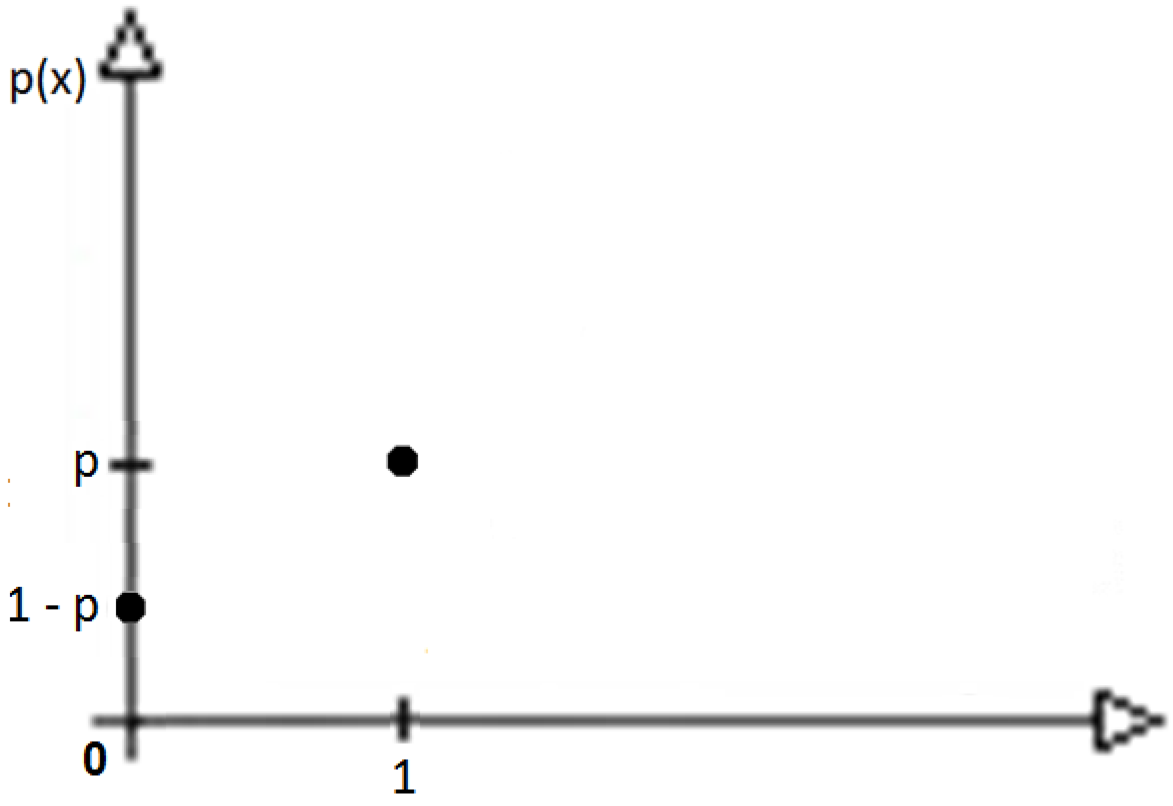
Onde x = 0 para fracasso e x = 1 para sucesso.

$$Média \Rightarrow E(x) = p$$

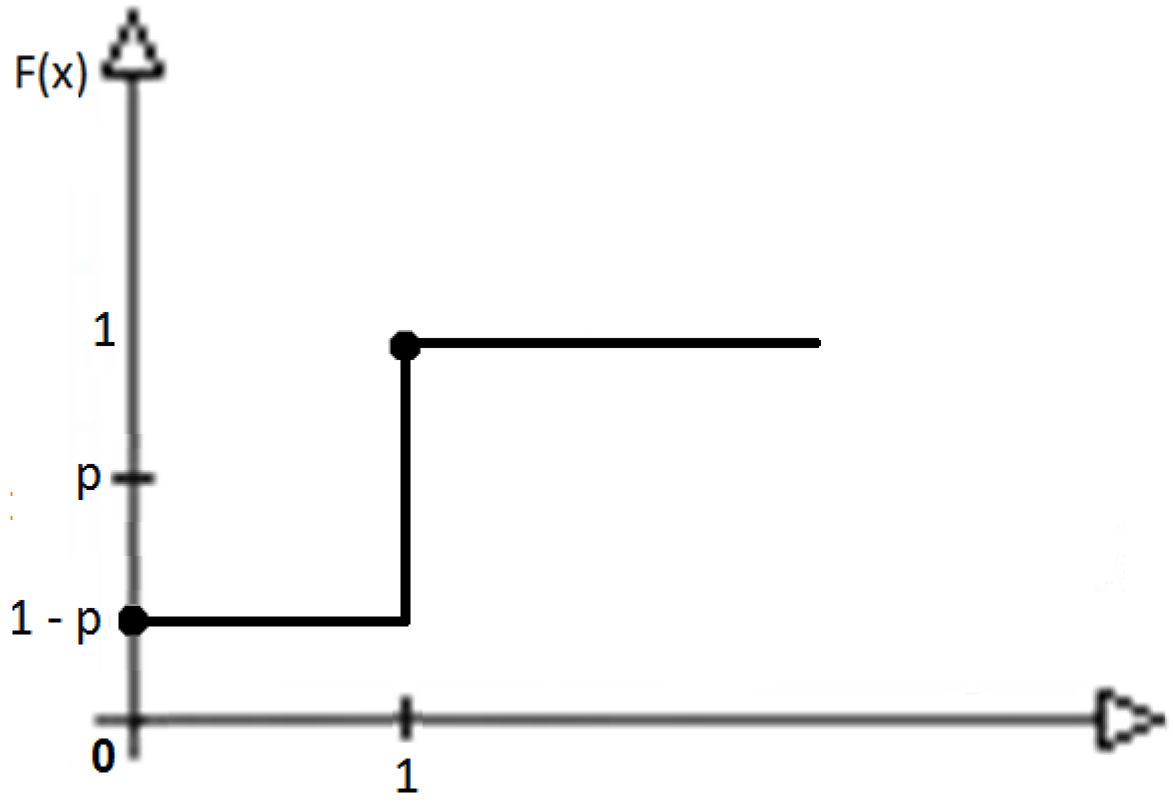
$$Variância \Rightarrow v(x) = pq$$

p = Probabilidade de sucesso
q = Probabilidade de fracasso

Gráfico da distribuição Bernoulli



(a) Função de probabilidade



(b) Função de distribuição

Exercício 1: Maria, jogando dardos, em 5 tentativas acertou 2 vezes ao centro do alvo, sabendo disso, calcule a média de acertos (taxa de sucesso) e a variância.

$$Média \Rightarrow E(x) = p = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = pq = \frac{2}{5} . \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

Distribuição Binomial: Imagine, agora que repetimos um ensaio de Bernoulli *n* vezes, desse modo, obtemos uma amostra de tamanho *n* de uma distribuição de Bernoulli. Vamos supor ainda que essas amostras sejam independentes, um ensaio não tem influencia nenhuma sobre o resultado de outro ensaio. Assim teremos uma amostra constituída de sucessos (1) e fracassos (0).

Dizemos que X tem distribuição Binomial com parâmetro n e x.

$$X \sim Binomial(n, x)$$

Exemplo: Repetindo um ensaio de Bernoulli 5 vezes (n=5), um particular resultado pode ser FSSFS ou (0,1,1,0,1), onde 0 é fracasso e 1 é sucesso.

A probabilidade de tal amostra será:

$$(1-p)pp(1-p)p = p^3(1-p)^2$$

O número de sucessos da amostra é igual a 3 e o de fracasso é igual a 2.

Cálculos da distribuição Binomial

$$função\ probabilidade \Rightarrow f(x) = C_x^n p^x . q^{n-x}$$

A formula do calculo da combinação é:

$$C_x^n = \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

$$Média \Rightarrow E(x) = np$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = npq$$

Exemplo: Numa família com n = 5 filhos, qual a probabilidade de não haver homens? Qual a probabilidade de haver dois homens?

$$n = 5$$
$$p = 0,5$$
$$q = 0,5$$

x = 0 homens

$$f(x) = C_x^n p^x . q^{n-x} = C_0^5 (0,5)^0 . (0,5)^{5-0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} (0,5)^0 (0,5)^5 = 0,0313$$

x = 2 homens

$$f(x) = C_x^n p^x . q^{n-x} = C_2^5 (0{,}5)^2 . (0{,}5)^{5-2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} (0{,}5)^2 (0{,}5)^3 = 0{,}3125$$

Exercício 2: Lançado uma moeda 8 vezes (ou 8 moedas), qual a chance de obter?

a) Três caras
b) No máximo três caras
c) No mínimo quatro caras

$n = 8$
$p = 0,5$
$q = 0,5$

a) Três caras

$$P(X=3)=C_x^n p^x . q^{n-x} = C_3^8 (0{,}5)^3 . (0{,}5)^{8-3}$$

$$P(X=3)=56\times 0{,}125\times 0{,}03125=0{,}2187$$

b) No máximo três caras

$$P(X\leq 3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$$

$$P(X=0)=C_0^8 p^0 . q^{8-0} = 0{,}0039$$
$$P(X=1)=C_1^8 p^1 . q^{8-1} = 0{,}0313$$
$$P(X=2)=C_2^8 p^2 . q^{8-2} = 0{,}1094$$
$$P(X=3)=C_3^8 p^3 . q^{8-3} = 0{,}2187$$

Então,

$$P(X \leq 3) = 0{,}0039 + 0{,}0313 + 0{,}1094 + 0{,}2187 = 0{,}3633$$

c) Probabilidade de sair pelo menos 4 caras

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7)$$

ou

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 0{,}6367$$

Exercício 3: Sabe-se que existem inúmeros fornecedores de um material X. Porém, somente 60% deles estão aptos a participar de uma licitação para fornecimento do material X para o setor público. Então, a probabilidade de que, numa amostra aleatória simples de 3 destes fornecedores, pelo menos um esteja apto a participar de uma licitação para fornecimento do material X para o setor público é:

a) 60%
b) 78,4%
c) 80,4%
d) 90,4%
e) 93,6%

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X \geq 1) = 1 - \binom{3}{0}(0,6)^0(0,4)^3$$

$$P(X \geq 1) = 1 - 0,064 = 0,936$$

Exercício 4: João pescou 65 peixes, sendo que ele utilizou 81 iscas. Ele espera pescar mais 10 peixes antes de ir para casa. Qual é a probabilidade de Joao pescar 7 peixes?

$$\mathrm{p} = \frac{65}{81} = 0.8024$$

$$P(X = 7) = \binom{10}{7}(0.8024\,)^{7}(1 - 0.8024\,)^{10-7}$$

$$P(X = 7) = 120 * 0{,}21401 = 0{,}1982$$

Distribuição Poisson: A distribuição de Poisson é empregada em experimentos nos quais não se está interessado no número de sucessos obtido em n tentativas, como ocorre no caso da distribuição binomial, mas sim no número de sucessos ocorridos durante um intervalo contínuo, que pode ser um intervalo de tempo, espaço, comprimento, área, ou volume.

Alguns exemplos de variáveis que podem ter a distribuição de Poisson são:

- Número de defeitos por centímetro quadrado;
- Número de acidentes por dia;
- Número de clientes por hora;
- Número de chamadas telefônicas recebidas por minuto;
- Número de falhas de um computador num dia de operação;

Cálculos da distribuição Poisson

$$função\ probabilidade \Rightarrow f(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}, x = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$Média \Rightarrow E(x) = \lambda$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = \lambda$$

- x é uma variável aleatória discreta;
- e base dos logaritmos neperianos (2,718...)
- λ - média da distribuição

Exemplo: Um departamento de policia recebe em média 5 solicitações por hora. Qual é a probabilidade de receber 2 solicitações numa hora selecionada?

$$P(x=2) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = f(x) = \frac{e^{-5}\,5^{2}}{2!} = 0{,}084224$$

Qual será a probabilidade de receber 6 solicitações em uma hora, caso a média de solicitações seja igual a 10? E se a média for igual a 6?

Exercício 5: A experiência passada indica que um número médio de 6 clientes por hora param para colocar gasolina numa bomba.

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?
b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem qualquer hora?
c) Qual é o valor esperado, a média, e o desvio padrão para esta distri buição?

a) Qual é a probabilidade de 3 clientes pararem qualquer hora?

$\lambda = 6$

$$P(x = 3) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = f(x) = \frac{e^{-(6)}\,(6)^{3}}{3!} = 0{,}08928$$

b) Qual é a probabilidade de 3 clientes ou menos pararem qualquer hora?

$\lambda = 6$

$P(x \leq 3) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$

$$P(x \leq 3) = \frac{e^{-(6)}\ (6)^0}{0!} + \frac{e^{-(6)}\ (6)^1}{1!} + \frac{e^{-(6)}\ (6)^2}{2!} + \frac{e^{-(6)}\ (6)^3}{3!} =$$

$P(x \leq 3) = 0{,}00248 + 0{,}01488 + 0{,}04464 + 0{,}08928 =$

$P(x \leq 3) = 0{,}15128$

c) Qual é o valor esperado, a média, e o desvio padrão para esta distribuição?

$$\lambda = E(X) = 6$$

$$\lambda = Var(X) = 6 \rightarrow S(x) = \sqrt{6} \cong 2{,}45$$

Exercício 6: O governo de uma ilha informou que durante 20 anos 196 turistas faleceram. Qual é a media do numero de turistas que faleceram por ano? Qual é a probabilidade de nenhum turista falecer no proximo ano? Qual é a probabilidade de 4 turistas falecerem no próximo ano?

$$\lambda = \frac{196}{20} = 9{,}8$$

$$P(x = 0) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = f(x) = \frac{e^{-(9{,}8)}\,(9{,}8)^{0}}{0!} = 0{,}0000555$$

$$P(x = 4) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = f(x) = \frac{e^{-(9{,}8)}\,(9{,}8)^{4}}{4!} = 0{,}0213$$

Exercício 7: O número de clientes que buscam, em cada dia, os serviços de um laboratório de águas em Cuiabá tem uma distribuição de Poisson com media de 2 clientes por dia. Para cada analise efetuada, o laboratório recebe R$10.000,00. No entanto, ele consegue fazer o máximo de duas análises em um dia; clientes excedentes são perdidos para outros laboratórios. Assinale a alternativa que indique o valor esperado da receita diária do laboratório. (Considere $e^{-2} = 0{,}14$)

a) R$ 5.600,00
b) R$ 8.400,00
c) R$ 10.000,00
d) R$ 14.400,00
e) R$ 20.000,00

Então queremos saber

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(x = 0) = \frac{e^{-2}\, 2^0}{0!} = 0{,}14$$

$$P(x = 1) = \frac{e^{-2}\, 2^1}{1!} = 0{,}28$$

$$P(x = 2) = \frac{e^{-2}\, 2^2}{2!} = 0{,}28$$

Receita esperada:

0*0,28 + 10000*0,28 + 20000*0,28 =

R$8.400,00

Exercício 8: (AFPS/2002) Sabe-se que o número de clientes que procuram atendimento numa agência da previdência no período das 17 às 18 horas tem distribuição de Poisson com média de 3 clientes. Assinale a opção que dá o valor da probabilidade de que mais de 2 clientes apareçam no periodo. Sabe-se que $e^{-3} = 0{,}0498$, sendo e o número neperiano.

a) 0,776
b) 0,667
c) 0,500
d) 0,577
e) 1,000

$$P(x > 2) = P(x \geq 3)$$

$$P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2))$$

$$P(x \geq 3) = 1 - \left(\frac{e^{-(3)}\,(3)^0}{0!} + \frac{e^{-(3)}\,(3)^1}{1!} + \frac{e^{-(3)}\,(3)^2}{2!}\right)$$

$$P(x \geq 3) = 1 - 8{,}5e^{-(3)} = 0{,}5767$$

Exercício 9: O número de pessoas que chegam ao guichê de uma repartição pública para autuação de processos apresenta uma distribuição de Poisson a uma taxa de duas pessoas por minuto. A probabilidade de que nos próximos 2 minutos chegue pelo menos uma pessoa neste guichê é:

$$\lambda = 2 \text{ duas pessoas por minutos, logo em 2 minutos,} \lambda = 4.$$

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0{,}9816$$

Exercício 10: Em uma estrada passam, em média, 2 automóveis por minuto. Supondo a média estável e considerando que $e^{-4} = 0{,}02$, a probabilidade de que em 2 minutos nenhum automóvel passe é de, aproximadamente:

a) 15%
b) 8%
c) 5%
d) 2%
e) 1%

$\lambda = 2$ automóveis por minuto, logo
$\lambda = 4$ automóveis em dois minutos.

$$P(x=0) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-4}\,4^{0}}{0!} = 0{,}0183 \cong 0{,}02 \rightarrow 2\%$$

Distribuição de probabilidade contínua

Representa quantidades aleatórias contínuas que podem tomar um número infinito de valores.

Por exemplo: A temperatura, a pressão, a precipitação ou qualquer elemento medido numa escala contínua é uma variável aleatória contínua.

Distribuição Exponencial: está ligada à de Poisson; ela analisa o experimento: um intervalo ou espaço para ocorrência de um evento.

Alguns exemplos:

- O tempo de espera em restaurantes, caixas de banco;
- O tempo de vida de aparelhos eletrônicos.

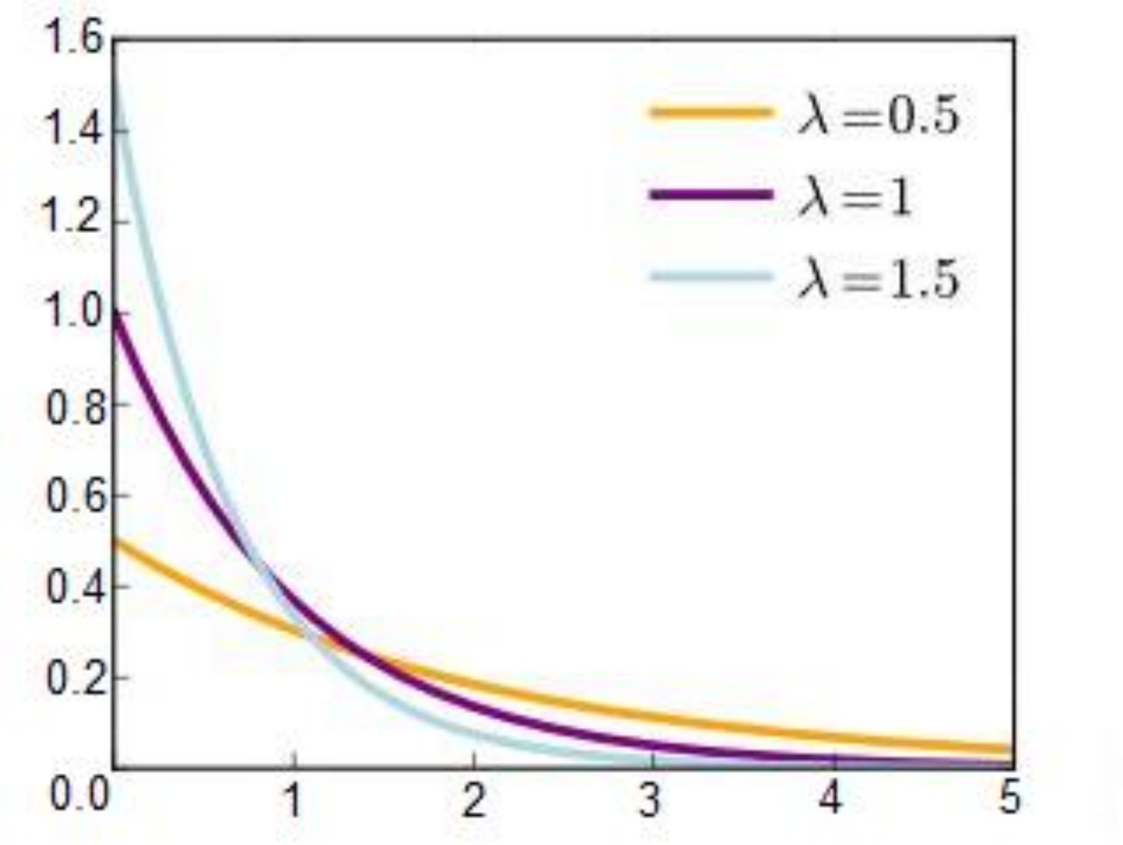
Cálculos da distribuição Exponencial

$$função\ probabilidade \Rightarrow f(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x} \quad \text{ou} \quad \lambda e^{-\lambda x}$$

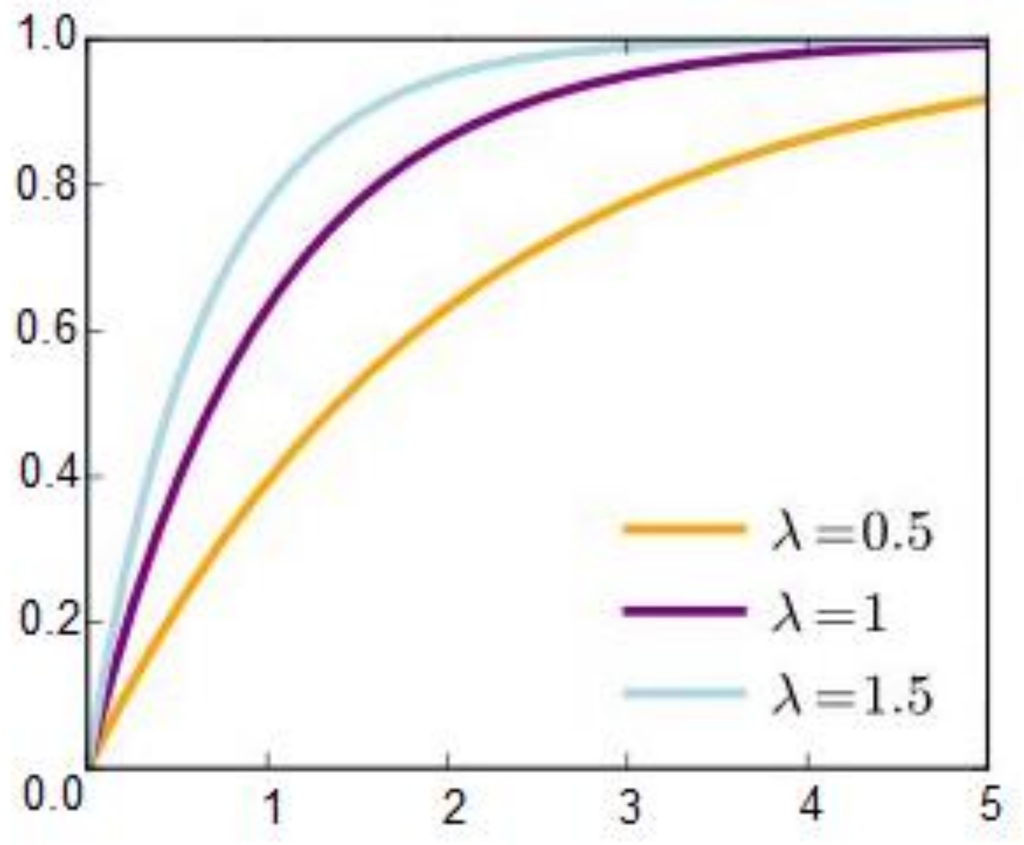
$$Média \Rightarrow E(x) = \frac{1}{\lambda}$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Gráfico da distribuição Exponencial



(a) Função de probabilidade



(b) Função de distribuição

Distribuição Normal: A distribuição Normal corresponde a mais importante distribuição de variáveis aleatórias contínuas, em razão da sua enorme aplicação nos mais variados campos do conhecimento.

Alguns exemplos:

- Altura;
- Peso;
- Pressão sanguínea.

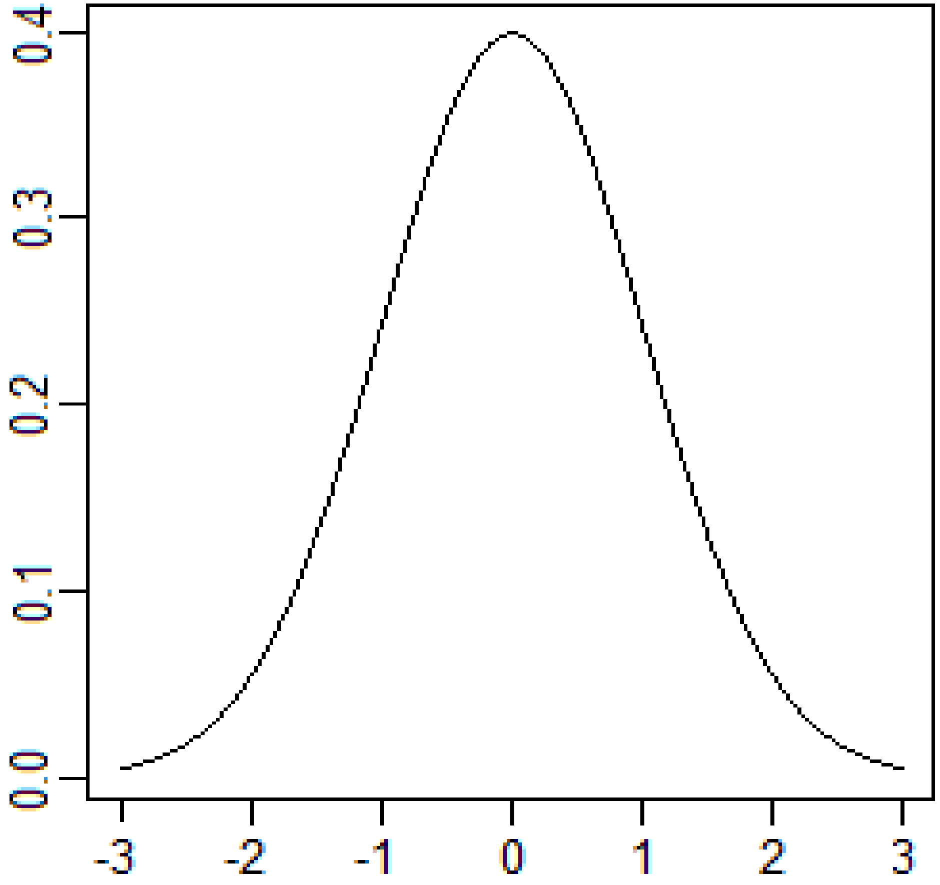
Cálculos da distribuição Normal

$$função\ probabilidade \Rightarrow f(x;\mu;\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)}$$

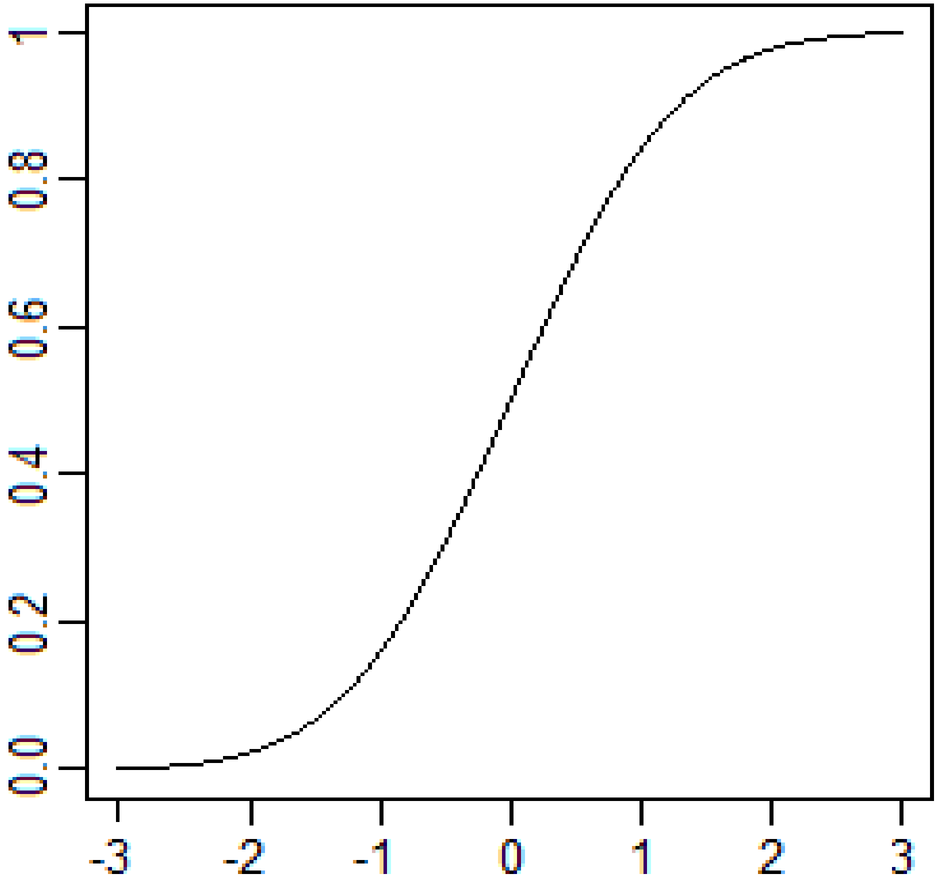
$$Média \Rightarrow E(x) = \mu$$

$$Variância \Rightarrow v(x) = \sigma^2$$

Gráfico da distribuição Normal



(a) Função de probabilidade



(b) Função de distribuição

Exercício 11: Sabe-se que o número de pessoas com suspeita de gripe suína que chegam a um pronto-socorro em certo intervalo de tempo, segue uma distribuição de probabilidade com valor esperado e variância igual a 30. Sendo assim, podemos assumir que a distribuição de probabilidade que descreve esse processo é:

a) Exponencial com parâmetro lambda igual a 1/30
b) Poisson com parâmetro lambda igual a 30.
c) Normal com média e variância igual a 30.
d) Binomial com p=30
e) Poisson com parâmetro lambda igual a 1/30