Universidade Federal de Mato Grosso

AULA 07 – Estatística

Prof. Lucas Bianchi

Cuiabá, 10 de setembro de 2016

Na aula de hoje, estudaremos:

- ✓Teste de hipótese para média
- ✓Teste de hipótese para proporção

Teste de Hipótese

Hipótese é uma pressuposição acerca de uma determinada característica de interesse. Constituído a partir de duas suposições:

H_0 (hipótese nula): Geralmente é uma afirmação do tipo “não há diferença”;

H_1 (hipótese alternativa): é a complementar da hipótese nula.

Tabela 1: Possíveis erros de se cometer no processo de tomada de decisão.

Decisões possíveis	Estados possíveis	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro tipo II **(β)**
Rejeitar H_0	Erro tipo I **(α)**	Decisão correta

Ao se testar uma hipótese estabelecida, a probabilidade máxima que se sujeita a correr o risco de um erro do tipo I é denominada de **nível de significância do teste** e é representada por α.

Pode-se formular as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta \neq \theta_0 \end{cases} \quad \mathit{Teste\ Bilateral}$$

A hipótese alternativa assume valores **diferentes** da hipótese nula, ou seja, podem valores ser maiores ou menores.

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta > \theta_0 \end{cases} \quad \mathit{Teste\ Unilateal}$$

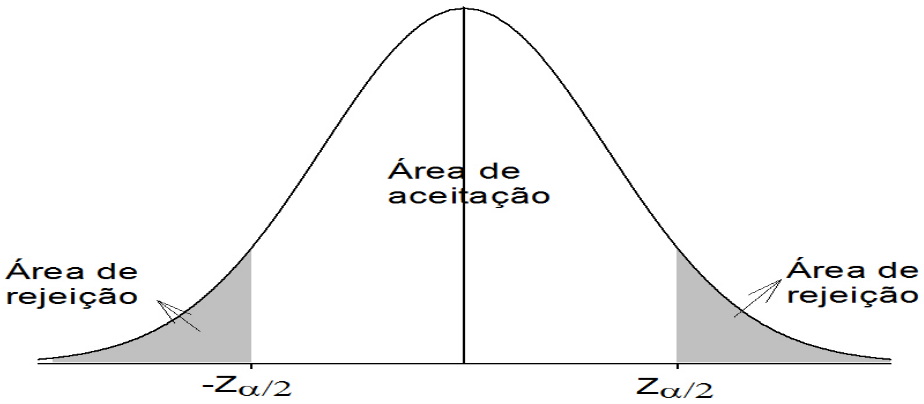
A hipótese alternativa assume valores **maiores** que a hipótese nula.

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta < \theta_0 \end{cases} \quad \mathit{Teste\ Unilateral}$$

A hipótese alternativa assume valores **menores** que a hipótese nula.

Nível de significância (α)

É o erro que se comete ao afirmar que o parâmetro está entre o limite inferior e o superior calculado. Quando estamos trabalhando com uma **teste bilateral**, temos que o α será dividido por 2, quando o **teste é unilateral** não se divide. Observe as figuras abaixo:



Assim, note que valor já conhecidos como $\alpha = 0{,}05$ podem assumir valores diferentes para testes unilaterais ou bilaterais. Veja o nível de significância de 5% para uma v.a. obtida de uma distribuição normal.

Teste bilateral: $0{,}5 - \frac{0{,}05}{2} = 0{,}4750 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}96$

Teste unilateral: $0{,}5 - 0{,}05 = 0{,}4500 \rightarrow Z_{\alpha/2} = 1{,}64$

Observação: Ambos os casos são com 5% de significância!

Teste de Hipótese para média - σ^2 conhecido

Suponha que X é uma variável aleatória com média μ desconhecida e **variância σ^2 conhecida**. Quer-se testar a hipótese de que a média é igual a certo valor especificado μ_0. O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

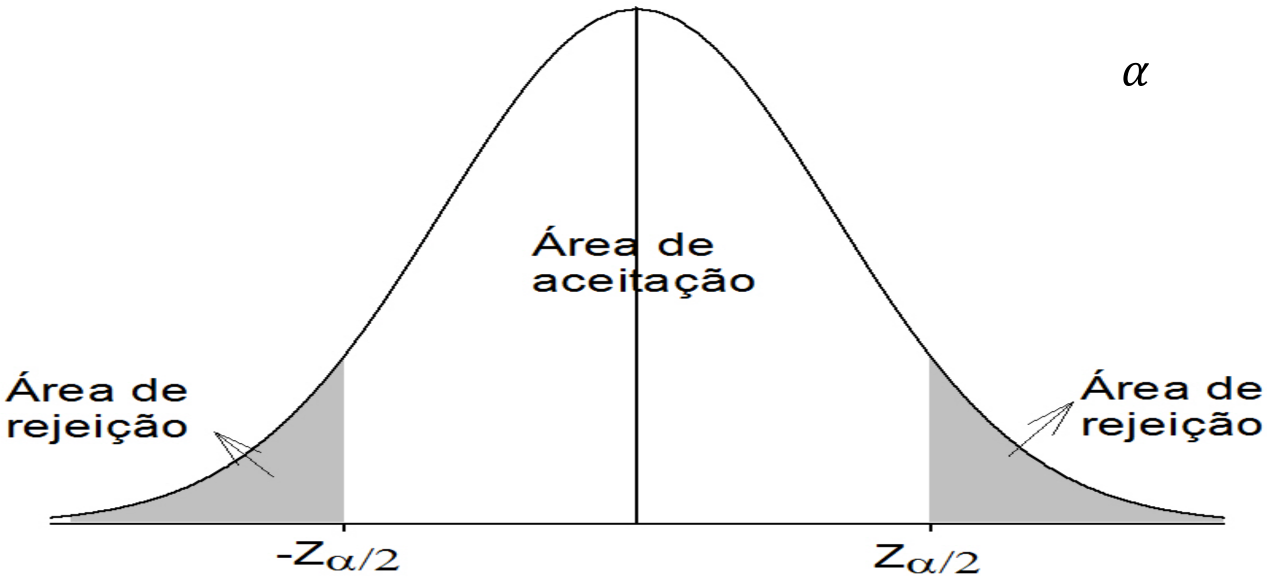
Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de n observações e se calcula-se a estatística:

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Como se trata de um teste bilateral têm-se duas alternativas para verificar se a hipótese H_0 é rejeitada

$$se\ |Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

α



$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

Se a hipótese formulada fosse

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{matrix}$$

Como se trata de testes unilaterais tem-se uma alternativa para verificar se a hipótese H_0 é rejeitada:

$$se\ |Z_c| > Z_\alpha$$

Exemplo 1: Uma indústria fabrica lâmpadas e afirma que o tempo de vida médio é de 800 horas. Mensuraram o tempo de vida de 40 lâmpadas e obteve-se uma média $\bar{x}$ = 750 e sabe-se que a variância populacional é σ^2 = 1600cm^2. Podemos afirmar que a indústria estava correta? Utilizando um teste unilateral, temos:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 \colon \mu = 800 \\ H_1 \colon \mu < 800 \end{cases}$$

Calculando o valor de Z_c

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = Z_c = \frac{750 - 800}{\frac{40}{\sqrt{40}}} = -7{,}90$$

Como não foi especificado o nível de significância, vamos assumir α = 0,05. Nesse caso, trata-se de um teste **unilateral**, temos que observar o valor tabelado para Z_α = $\boxed{Z_{0,05} = 1{,}64.}$

Conclusão: Observando $|Z_c|$ = 7,90, temos que como 7,90 > 1,64, rejeita-se H_0, a um nível de significância de 5%, ou seja, com 95% de probabilidade a empresa estava errada ao afirmar que o tempo de vida médio é de 800horas.

Exercicio 1. Utilizando do exemplo anterior, considere $\bar{x}$ = 700 e a variância populacional σ^2 = 1500cm^2.

Teste de Hipótese para média - σ^2 desconhecido

Suponha que X é uma variável aleatória Normal com média μ desconhecida e variância **σ^2 desconhecida**. Quer-se testar a hipótese de que a média é igual a certo valor especificado μ_0. O teste de hipótese pode ser formulado como segue:

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{H}_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{matrix}$$

Para testar a hipótese, toma-se uma amostra aleatória de $n \leq 30$ observações com variância desconhecida se calcula a estatística:

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Rejeita-se H_0, quando

Teste bilateral: $se\ |t_c| > t_{\frac{\alpha}{2}}$

Teste unilateral: $se\ |t_c| > t_{\alpha}$

Exemplo 2: Em uma indústria, um determinado rolamento esférico é dito de qualidade se o seu diâmetro médio for igual a 240 cm. Para verificar se os diâmetros médios estão atendendo as especificações, foi tomada uma amostra ao acaso de 20 peças, fornecendo um diâmetro médio de 236 cm com desvio padrão de 15 cm. Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 : \mu = 240 \\ H_1 : \mu \neq 240 \end{cases}$$

Calculando o valor de t_c

$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = t_c = \frac{236 - 240}{\frac{15}{\sqrt{20}}} = -1{,}193$$

Como não foi especificado o nível de significância, vamos assumir α = 0,05. Nesse caso, trata se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $t_{\alpha/2} = t_{\frac{0{,}05}{2}} = t_{0{,}025} = 2{,}0923$

Conclusão: Observando $|t_c|$ = 1,193, temos que como 1,193 < 2,093 não existe razão para rejeitar H_0, logo os diâmetros médios estão atendendo as especificações.

Exercicio 2. Considere n=20 e média amostral igual 220.

Teste de Hipótese para proporção

Assim como para a média, existem testes de hipóteses associados a proporções, estes testes são a respeito do parâmetro populacional p. Com os dados coletados de uma amostra de tamanho n, pode-se verificar o numero de sucessos X, e estimar a proporção $\hat{p}$.

Para testar hipóteses sobre proporções pode-se utilizar a distribuição normal, nesse caso se calcula a estatística:

$$Z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}}$$

Rejeita-se H_0, quando:

Teste bilateral $se\ |Z_c| > Z_{\frac{\alpha}{2}}$

Teste unilateral $se\ |Z_c| > Z_{\alpha}$

Exemplo 3: Um centro de pesquisas afirma que 30% das pessoas são usuários de internet sem fio em uma determinada região. Em uma amostra aleatória de 30 pessoas, 12 dizem ter rede sem fio em casa. Teste a afirmação do centro de pesquisa utilizando a significância α= 0,05.

Temos que $p_0 = 0{,}30 \Rightarrow q_0 = 1 - p = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$, número de sucesso X=12 e tamanho da amostra $n = 30$, assim temos:

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{12}{30} = 0{,}40$$

Utilizando um teste bilateral

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0: p = 0{,}30 \\ H_1: p \neq 0{,}30 \end{cases}$$

Calculando o valor de Z_c

$$Z_c = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}}} = \frac{0{,}40 - 0{,}30}{\sqrt{\frac{0{,}3X0{,}7}{30}}} = 1{,}20$$

Nesse caso, trata-se de um teste bilateral, temos que observar o valor tabelado para $Z_{\alpha/2} = Z_{\frac{0,05}{2}} = Z_{0,025} = 1{,}96$.

Conclusão: Observando $|Z_c|$= 1,20, temos que como 1,20 < 1,96, ou seja, $|Z_c|$ < $|Z_{\frac{\alpha}{2}}|$, não existe evidências para rejeitar H_0 ao nível de 5% de significância, logo a proporção de pessoas que utilizam a internet sem fio em de 30%.

Resumo das etapas aplicadas a qualquer teste de hipótese

1. Determinar as hipóteses nula e alternativa;
2. Selecionar a estatística de teste que será usada para decidir rejeitar ou não a hipótese nula;
3. Especificar o nível de significância α para o teste;
4. Usar o nível de significância α para desenvolver regra de decisão que indica os valores críticos da estatística de teste que levará a rejeição de H_0;
5. Coletar os dados amostrais e calcular a estatística de teste;
6. Comparar o valor da estatística do teste com o(s) valor(es) crítico(s) especificado(s) na regra de decisão para determinar se H_0 deve ser rejeitado.